Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. y Nat., Buenos Aires, Argentina, tomo 50, 1998.

MÉTODOS COMPUTACIONALES APLICADOS A PROBLEMAS DE HIDRODINÁMICA NAVAL

Sergio R. Idelsohn, Mario A. Storti y Jorge D'Elía

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC) INTEC-(CONICET-UNL). Güemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina.
E-mail: mstorti@intec.unl.edu.ar, http://venus.arcride.edu.ar

Resumen

Unos de los temas de mayor interés en la hidrodinámica naval es la estabilidad o "tenida a la mar" (sea-keeping) ante la incidencia de olas externas. La mayoría de las soluciones existentes se basan en una formulación del "Método de Paneles", teniendo en cuenta en la función de Green correspondiente la condición linealizada de superficie libre. Esta metodología lleva a una formulación más compacta en cuanto a que no es necesario discretizar la superficie libre, pero por otra parte requiere de la integración numérica de funciones especiales para el cálculo de los coeficientes de influencia entre los paneles. Además, sufre de la existencia de frecuencias espúreas, para las cuales el sistema lineal colapsa. Sin embargo, en muchos casos prácticos el Método es de gran interés, sobre todo en los casos en que estas frecuencias están por encima del rango de trabajo. Otra posibilidad es el uso del "Método de los Elementos Finitos" con condiciones absorbentes. Esta formulación elimina completamente el problema de las frecuencias espúreas pero en principio parece ser más costosa. En este trabajo se presentan resultados obtenidos con ambas metodologías, para diferentes casos.

Abstract

One of the subjects of most interest to naval hydrodynamics is the "sea-keeping" problem, i.e. the stability properties of the ship under the influence of an incoming wave. Most of the proposed methods are based on panel discretization, using the Green function that includes the linearized free surface condition. This methodology avoids the discretization of the free surface, with the corresponding reduction in computer time, but requires the computation of specialized functions via numerical integration. Furthermore, it suffers of spurious frequencies, i.e. a certain number of frequencies for which the linear system is singular. This frequencies are often outside the range of interest, but the accuracy of the method is affected globally. Another possibility is to combine finite elements with absorbing boundary conditions. This alternative does not suffer of spurious oscillations but is more expensive in CPU time. Numerical results with both methods are presented.

Acto realizado con motivo de la entrega del premio "Luis M. Machado" en Mecánica Computacional, el 21 de noviembre de 1997.

1. Introducción

El método de paneles es un método de resolución numérica extensamente empleado en la industria aeronáutica e hidronaval [L.85, H.C96], y está orientado preponderantemente a problemas tridimensionales (3D) de flujo invíscido e incompresible, exterior a cuerpos inmersos en una corriente. Es decir, en todos aquellos casos de flujo donde la aproximación de flujo potencial exterior sea, al menos inicialmente, factible. Por supuesto, luego es plausible la opción, ya sea de pasar a otro nivel de descripción fluidodinámica o también la de emplear estrategias mixtas, por ejemplo, acoplamiento invíscido/viscoso.

En el caso de los paneles, su estrategia se basa en la formulación y resolución de ecuaciones integrales [J.88] fundamentadas, en última instancia, en el uso de las funciones de Green. Estas constituyen un recurso muy interesante en la resolución de ecuaciones diferenciales, y son bastante conocidas en ecuaciones diferenciales lineales. La solución construida mediante una función de Green, verificará la ecuación diferencial y *algunas o todas* sus condiciones de borde. Este detalle es importante que lo tengamos presente, porque en la búsqueda de la función de Green para un problema dado, podemos elegir que la misma satisfaga *o todas o sólo algunas* de las condiciones de contorno, en donde, claro está, mientras más condiciones de borde satisfaga, más elaborada resultará su expresión. Esto último es el caso del "seakeeping" en ingeniería naval [A.R89, J.N78, Ohk96], donde, en su mayor generalidad, consideramos el problema hidrodinámico de un objeto tridimensional oscilando como cuerpo rígido en los 6 grados de libertad, con o sin corriente uniforme y con o sin un frente de ola incidente [JJE91, SJ98]. Bajo la aproximación de flujo potencial con una superficie libre, y condiciones de borde linealizadas, parte de la tarea conduce a hallar los 6 potenciales de radiación para cada modo de oscilación más el potencial de difracción para el frente de ola incidente [RW89, JP85]. Cada uno de estos potenciales $\phi_k(x, y, z, t)$, con k = 1, 2, ..., 7, los podemos hallar mediante la resolución de sendas ecuaciones integrales, en donde sólo vamos cambiando su término fuente. Las posibilidades de elección de la función de Green en este problema de *radiación y difracción* son diversas. En primer lugar, nos restringiremos a un *cálculo en frecuencia,* en donde supondremos dependencias temporales *monocromáticas* en la forma $e^{i\omega t}$, por lo que nos será suficiente considerar sólo la dependencia espacial. Para esta última son extensamente empleadas tanto las *fuentes de Rankine* como las *fuentes de Kelvin* [P.D87]. Ambas comparten la propiedad de *no* verificar la *condición de resbalamiento* del flujo sobre la superficie del casco mojado, por lo que en ambas opciones tendremos que colocar paneles en, al menos, esa superficie.

Las *fuentes de Rankine* ($1/r$) son mucho más simples y cómodas de usar, empero, además de no verificar la condición de resbalamiento sobre el casco, tampoco verifican ni la condición de superficie libre ni las condiciones de radiación. Esto nos obliga a agregar paneles al menos en la superficie libre, mientras que pueden concebirse recursos diversos para imponer las condiciones de radiación sin la necesidad de colocar paneles al infinito. Su gran ventaja es su aptitud cuando pretendemos mover la superficie libre [YP98, C.98] (es decir, no linealidad geométrica). En cambio, las *fuentes de Kelvin* son bastante elaboradas en su expresión matemática y, en principio, sólo son aptas para condiciones de superficie libre linealizadas. Su única gran ventaja es que verifican las condiciones de borde tanto de superficie libre como las de radiación, en consecuencia, estaremos obligados a colocar paneles *únicamente* en la superficie mojada del casco.

2. Método de paneles con fuentes de Kelvin

2.1 *Formulación por ecuación integral*

El problema de radiación y difracción de olas por un casco rígido oscilando en sus 6 grados de libertad, alternativamente,

lo podemos describir por la formulación integral [Ohk96, JJE91, SJ98, RW89, YP98, C.98, F.82]

$$\frac{1}{2}\phi_k(x)+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma d\Gamma G_{,n}(\boldsymbol{x},\xi)\phi_k(\xi) =$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma d\Gamma G(\boldsymbol{x},\xi)\,\sigma_k(\xi) \quad \text{con } x\in\Gamma; \qquad (1)$$

donde $\phi_k(\boldsymbol{x})$, son los potenciales de *radiación* de cada modo rígido, para k = 1, 2, ..., 6, mientras que ϕ_7 es el potencial de *difracción* debido al frente de ola incidente. Γ es la superficie del casco, y G es la función de Green que incluye la condición de superficie libre linealizada $G_{,n} = KG_{,xx}$. $K = \omega^2/g$ es el número de onda característico, g la aceleración de la gravedad. El *término fuente* σ_k de la ecuación integral está dado por

$$\sigma_k = \begin{cases} i\omega n_k; & \text{para } k = 1, 2, ..., 6 \\ \phi_0; & \text{para } k = 7 \end{cases} \qquad (2)$$

donde n_k es la componente k de la *normal generalizada* de la superficie, definida de modo tal que, (n_1, n_2, n_3) son las componentes cartesianas del versor normal $\hat{\mathbf{n}}$ de la superficie Γ, mientras que (n_4, n_5, n_6) está dado por $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \hat{\mathbf{n}}$, es decir, su momento estático respecto del origen relativo $\boldsymbol{r}_0$ (a veces, el centro de masa o el origen), y $\boldsymbol{x}$, ξ son los puntos de observación y fuente (de integración), respectivamente. Por su parte ϕ_0 es el *potencial incidente* del frente de ola, para el cual supondremos dado por

$$\phi_0 = \frac{ig}{\varpi} e^{Kz} e^{-iK(x\cos\beta + y\sin\beta)} \qquad (3)$$

La discretización mediante paneles, usualmente se reduce a una *técnica de colocación* de la ecuación integral en los centroides de los paneles, obteniendo así el sistema $\boldsymbol{H}\phi_k = \boldsymbol{C}\sigma_k = \boldsymbol{b}_k$, de n ecuaciones con n incógnitas (compatible y determinado), donde $\boldsymbol{H} = 1/2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ es la matriz del sistema, con

$$A_{ij} = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_j} d\Gamma \boldsymbol{G}_{,n}(\boldsymbol{x}_i,\xi); \qquad (4)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_j} d\Gamma \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_i,\xi); \qquad (5)$$

donde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ son las matrices *dipolar* y *monopolar*, respectivamente, y ϕ_k, σ_k son los vectores de los potenciales y de los flujos correspondientes al modo k activado, donde todos estos términos son magnitudes complejas, es decir, con módulo y fase. Como se desprende, las matrices monopolar $\boldsymbol{C}$ y dipolar $\boldsymbol{A}$, representan a la función de Green G y su derivada normal $G_{,n}$, respectivamente. Además, para cada frecuencia ω, la matriz del sistema $\boldsymbol{H}$ es invariante para cada modo k, cambiando sólo el término fuente $\boldsymbol{b}_k$, por lo cual factorizamos primero la matriz del sistema (eg. mediante descomposición LU) y luego resolvemos para cada modo k. En el cálculo de las matrices dipolar y monopolar debemos evaluar tanto la función de Green G como su derivada normal $G_{,n}$, y debido a la expresión bastante elaborada de su componente "oscilatoria" $\tilde{G}$, recurrimos a una estrategia de integración numérica. Para esto último, y por lo pronto, hemos implementado integración gaussiana sobre paneles triangulares con 1, 3 y 7 puntos donde, hasta ahora, resulta recomendable emplear un número de puntos de integración por panel, tal que resulte una solución de compromiso entre exactitud y velocidad de evaluación de ambas matrices, que a su vez, nos conviene calcularlas simultáneamente.

2.2 *Paneles de Kelvin*

A la formulación en paneles que utiliza la función de Green que satisface automáticamente la condición de superficie libre linealizada se la conoce como *método de los paneles de Kelvin*. La formulación matemática es bastante compleja, bastante más que la de los usuales paneles de Rankine, que corresponden a las simples funciones de Green $4\pi/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$. La definición de la función de Green es

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \text{ para } z < 0 \\ (\partial G/\partial z) = KG \text{ para } z = 0 \\ \text{Condición de radiación apropiada,} \\ \text{para } |\boldsymbol{x}| \to \infty \end{cases} \quad (6)$$

Donde $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ es el *"punto fuente"* y $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ el *"punto de observación"*. En el límite para muy bajas frecuencias ($K \to 0$) la condición de superficie linealizada tiende a una condición de Neumann homogénea y entonces la función de Green se obtiene simplemente del método de imágenes como $G = 1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| + 1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}'|$, donde $\xi' = (\xi, \eta, -\zeta)$ es el punto imagen con respecto a la superficie libre $z = 0$ y la función de Green ha sido normalizada por 4π. Entonces proponemos la siguiente descomposición

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} + \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}'|} + \tilde{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad (7)$$

$\tilde{G}$ es la *componente oscilatoria* de la función de Green y puede representarse como

$$\tilde{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{G}(X, Y) = \\ = -\pi K e^{-Y}[H_0(X) + Y_0(X) + P_0(X,Y) + 2iJ_0(X)]; \quad (8)$$

donde $X = K\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, $Y = K|\zeta|$, H_0 es la *función especial de Struve*, J_0, Y_0 son las funciones de Bessel de orden 0 de primera y segunda especie y

$$P_0(X, Y) = \frac{2}{\pi} \int_0^Y dt \frac{e^t}{\sqrt{t^2 - X^2}}. \quad (9)$$

es la *integral finita de Havelock* [J.N78]. La función de Struve está definida por una ecuación de segundo grado, y en la práctica se la calcula en forma de series. La integral de Havelock es más complicada ya que tiene dos argumentos de manera que usar un desarrollo en series o aproximación espectral es en principio complicado. Por otra parte un cálculo por cuadratura numérico es costoso. Si bien en el caso de resolución directa del sistema lineal resultante de ecuaciones la parte más costosa del cálculo es la factorización de la matriz y no su cálculo, el hecho de que el cálculo de los coeficientes de la matriz sea tan costosa inhabilita el uso de métodos iterativos, ya que en ese caso es necesario recalcular los coeficientes en cada iteración.

2.3 *Acoplamiento con la dinámica del barco*

Calculando las presiones ejercidas por el fluido sobre el casco para los diferentes modos de radiación y difracción se obtiene una *"matriz de acoplamiento fluido-estructura"* que, para un dado desplazamiento en un dado modo k, y para una dada frecuencia de encuentro, da la fuerza ejercida por el agua sobre el casco (complejas, es decir, amplitud y fase) T_{jk} en el modo j. La parte real de esta función de transferencia representa una *"masa agregada"* mientras que la parte imaginaria corresponde a la disipación de energía por emisión de ondas de gravedad. Concretamente, la matriz de acoplamiento se descompone como $T_{jk} = \omega^2 A_{jk} - i\omega B_{jk}$ con A, B reales. Acoplando con la dinámica del barco (masa y tensor de inercia) se obtiene un sistema de ODE's en el tiempo para los 6 grados de libertad del barco. Alternativamente, en un análisis en frecuencias se obtiene un sistema complejo de 6 x 6 para cada frecuencia y resolviéndolo se obtienen las *"funciones de transferencia"* (RAO), es decir el desplazamiento producido en cada grado de libertad para una dada ola de amplitud unitaria.

3. Método de elementos finitos

Las ecuaciones de gobierno para la resolución de cada uno de los problemas de difracción y radiación es, básicamente, la ecuación de Laplace en la región ocupada por el fluido con condición de deslizamiento en el casco y la condición de superficie libre linealizada $\phi_z = K\phi$. La discretización por elementos finitos es estándar, pero es fundamental la inclusión de *"condiciones de contorno absorbentes"* apropiadas [GK90,

J.88, LT88]. Hemos desarrollado condiciones de contorno basadas en la metodología DNL[MJS98, SDI98, D'E97].

4. Resultados numéricos

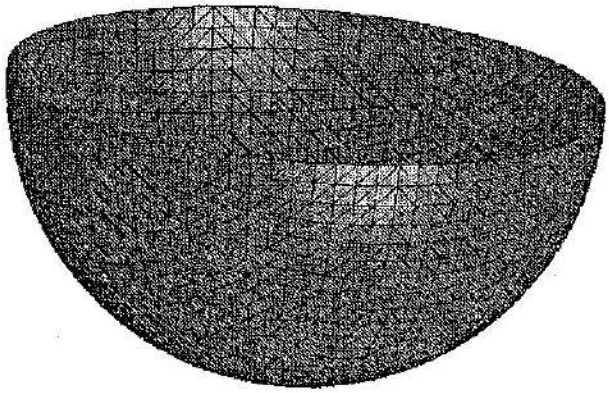

Fig. 1: Semiesfera sumergida. Malla con 3000 paneles triangulares, tipo Kelvin, sólo sobre la superficie de una hemiesfera oscilante.

4.1 *Semiesfera sumergida. Método de Paneles*

Consideremos una semiesfera sumergida oscilando en los modos de *"surge/sway"* (horizontal) y *"heave"* (vertical). En la figura 1 se observa la malla utilizada y en la figura 2 se presentan los resultados numéricos comparados con los de otros autores (paneles y analíticos). A altas frecuencias se observa el efecto de las frecuencias irregulares. Si bien éstas aparecen, en general, por encima del rango de interés, su efecto se expande a todo el rango de frecuencias y, de hecho, provoca que el esquema en principio no sea convergente, ya que su efecto no desaparece con refinamiento.

4.2 *Fragata. Método de Paneles*

En las figura 3 y 4 mostramos la malla de 4400 paneles y las funciones de respuesta en cabeceo (*pitch*) y movimiento vertical (*heave*), tanto bajo la acción de olas incidiendo a 0°, o desde atrás (*following waves*), como a 60° (*quartering waves*). En el caso de following waves observamos que, cuando la frecuencia de encuentro ω_e tiende a cero, las funciones de transferencia para pitch/heave tiendan a uno. Esto se debe a que, bajo la acción de olas muy largas, ω_e es muy baja y, en consecuencia, los efectos dinámicos asociados con la masa agregada y el amortiguamiento son relativamente pequeños. En consecuencia, las excitaciones y reacciones sobre el casco son preponde-

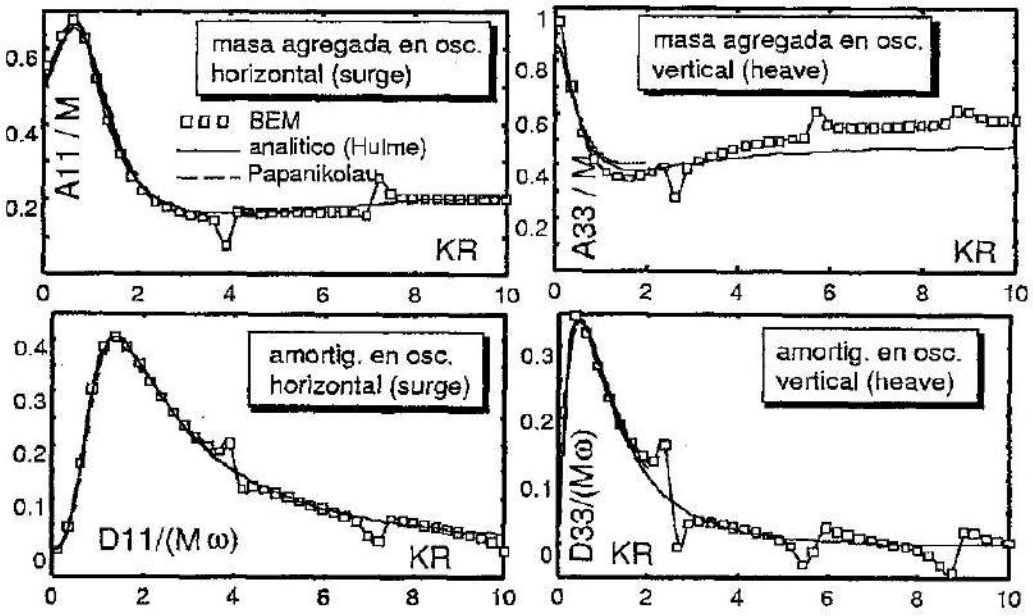

Fig. 2: Semiesfera sumergida. Coeficientes de masa agregada A'_{kk} y de amortiguamiento D'_{kk}.

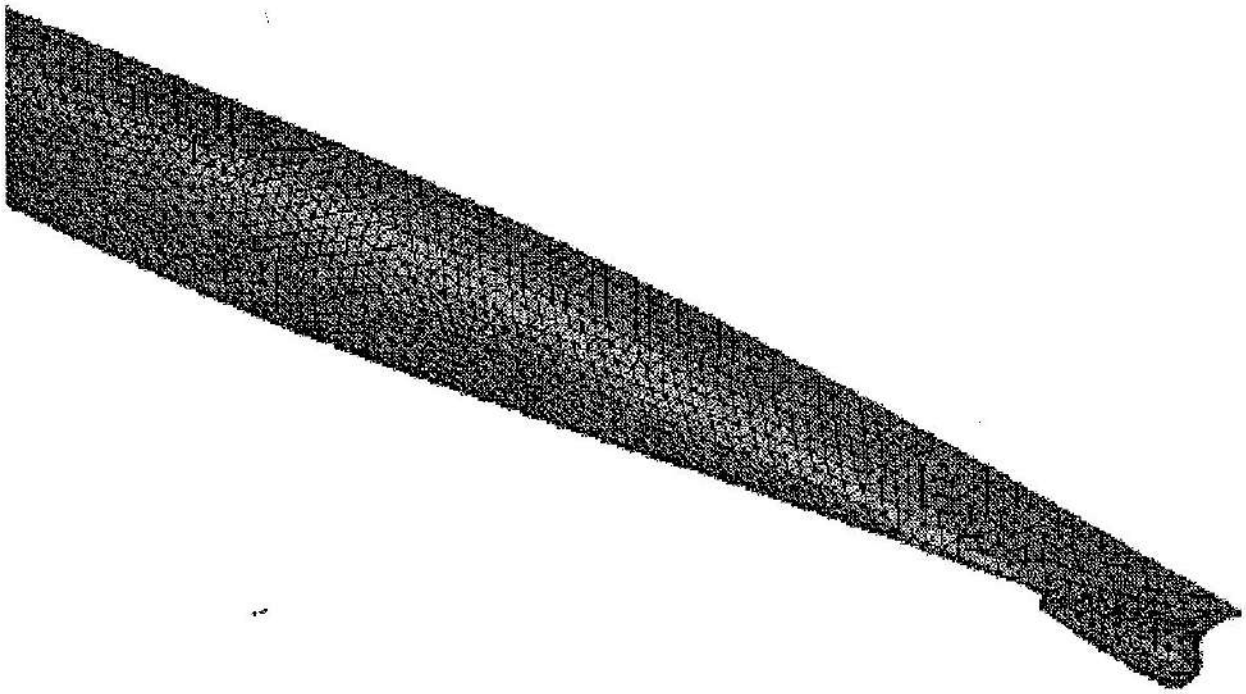

Fig. 3: Fragata. Malla de 4400 paneles sobre el casco de una fragata.

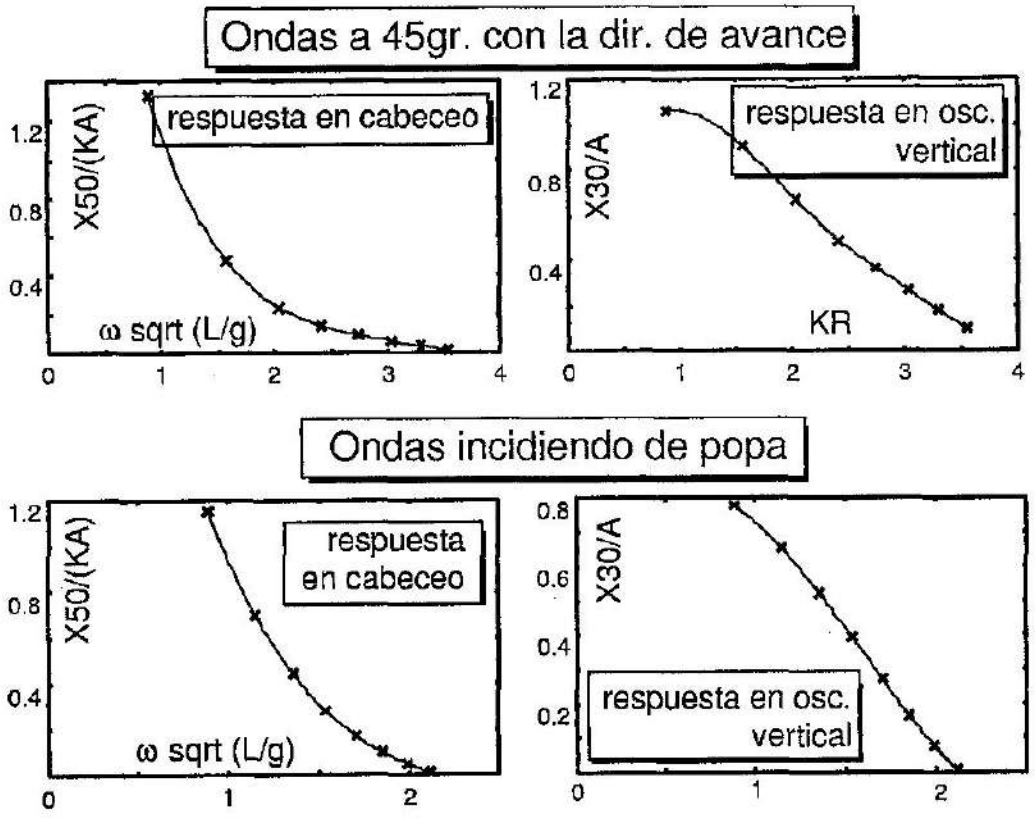

Fig. 4: Fragata. Funciones de transferencia en la fragata bajo quartering y following waves, modos heave y pitch.

rantemente debidas a los cambios en la flotación, los cuales, bajo longitudes de ola muy largas, se traducen en grandes amplitudes de movimiento. Además, para velocidades de avance moderadas, la celeridad de la ola es mucho mayor, por lo cual podemos suponer que el casco se comporta como si estuviera estacionario a medida que la ola lo va pasando. En consecuencia, el centro de masa de la nave se mueve casi como una partícula de agua al nivel de la superficie, esto es, describiendo una trayectoria cercanamente circular. Por otra parte cuando la frecuencia de encuentro es muy alta, las funciones de transferencia para pitch/heave, generalmente, disminuyen notoriamente. Ahora las fuerzas de flotación alternan muy rápidamente en signo a lo largo de la superficie mojada del casco. Esto, a pesar de la creciente importancia de los efectos dinámicos para frecuencias de encuentro elevadas, suele traducirse en una notoria reducción en la excitación bajo la acción de olas muy cortas. Además, de las figuras vemos la buena concordancia cualitativa con los ensayos de Smith. Estos ensayos han mostrado que el casco, en general, experimentará excitaciones significativas sólo cuando las longitudes de ola incidentes sean *mayores* que alrededor de 3/4 de eslora de la nave (ver eg. [A.R89]). Por otra parte, bajo olas muy largas, la fase para el heave es $\delta_3 \approx 0°$, esto es, el movimiento vertical está prácticamente en fase con el movimiento de la ola incidente. En cambio, la fase del pitch es $\delta_5 \approx +90°$, indicando que la máxima rotación está desfasada alrededor de un cuarto de período. Por último, bajo quartering waves, las funciones de transferencia resultan algo similares que en el caso de following waves, aunque el rango de frecuencias de encuentro es ahora relativamente menor.

5. Catamarán 2D. Método de elementos finitos

Para cascos alargados y oleaje de costado (a 90° con respecto a la dirección de avance), el problema puede considerarse aproximadamente bidimensional. El siguiente ejemplo corresponde al modo de resonancia más baja en un catamarán y es explicado en detalle en el libro de Ohkusu[Ohk96]. La sección de cada casco tiene una relación manga/calado de B/T = 2 y la separación de los ejes de cada casco es de $2P = 4T$ (ver figura 5). Sólo existen tres modos (ver figura 6) a saber, traslación lateral ("*sway*"), vertical ("*heave*") y rotación con respecto al eje de avance ("*rolido*").

El punto con respecto a este tipo de arquitectura es que, por supuesto, tiene un coeficiente de restitución muy grande con respecto al rolido, debido a su gran expansión en la dirección de la manga, pero por otra parte la "pileta" de agua encerrada entre los dos cascos tiene modos de resonancia que pueden desestabilizar hidrodinámicamente toda la estructura. Efectivamente, en las figura 7 y 8 vemos las curvas de masa agregada y damping (Nota: Los coeficientes

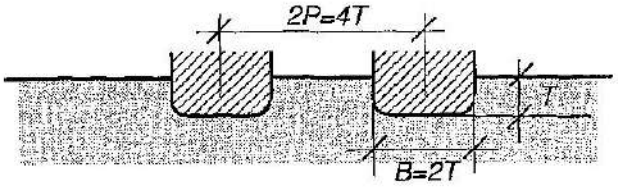

Fig. 5: Catamarán 2D. Geometría de una sección típica

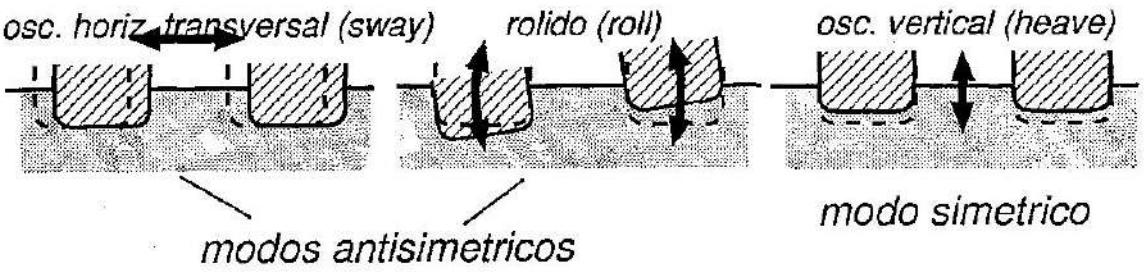

Fig. 6: Catamarán 2D. Modos de oscilación

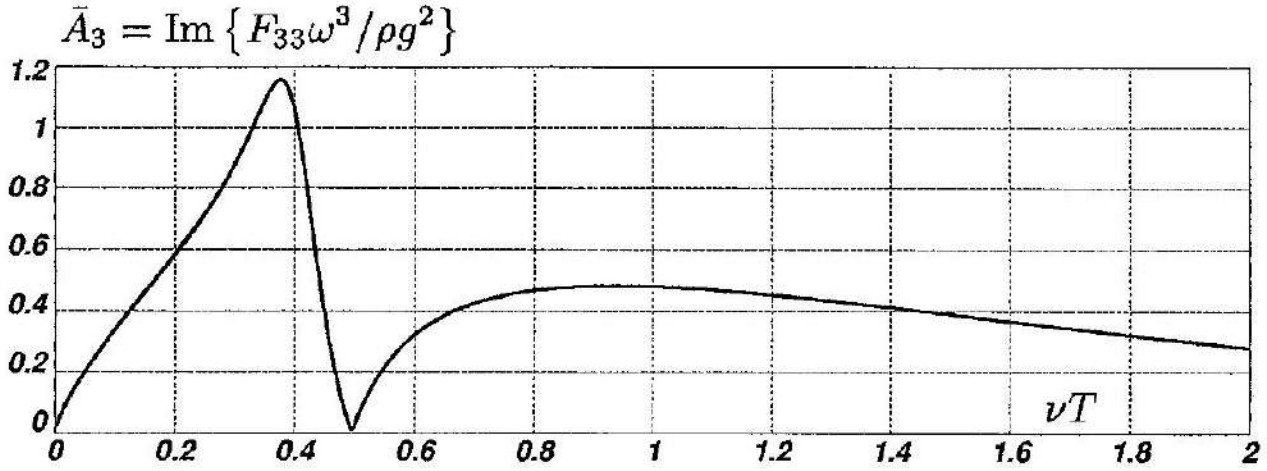

Fig. 7: Catamarán 2D. Amplitud de las ondas emitidas (damping) para oscilación vertical (heave).

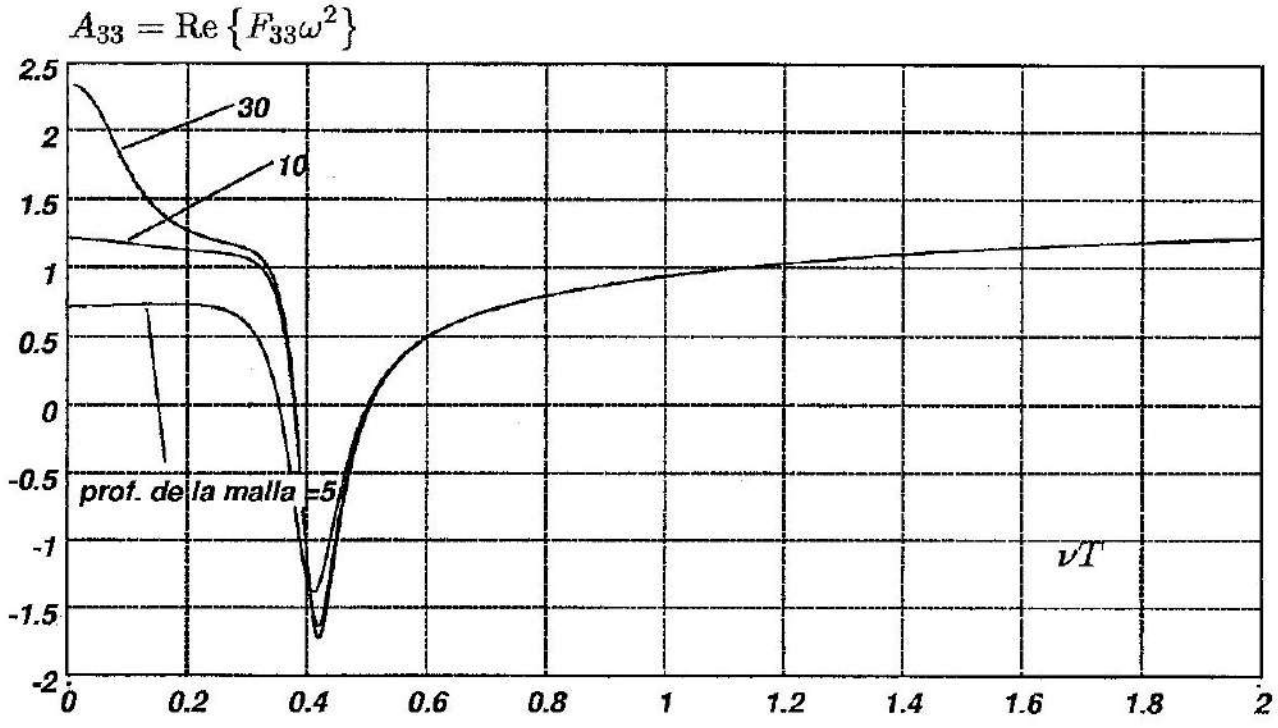

Fig. 8: Catamarán 2D. Masa agregada para oscilación vertical (heave).

F_{jk} son proporcionales a los T_{jk} y para problemas 2D puede demostrarse que el damping está directamente relacionado con la amplitud de la onda emitida $\bar{A}_j$). Vemos que al variar la frecuencia el sistema pasa por una resonancia donde la masa agregada toma valores negativos y el damping se hace nulo, lo cual es un evidente signo de inestabilidad. Estos resultados coinciden muy bien con los presentados por Ohkusu[Ohk96].

Justo en la frecuencia de resonancia la "pileta" interior está en un modo donde la altura es constante. En realidad existe una familia de modos, en los cuales hay un número entero de semilongitudes de onda

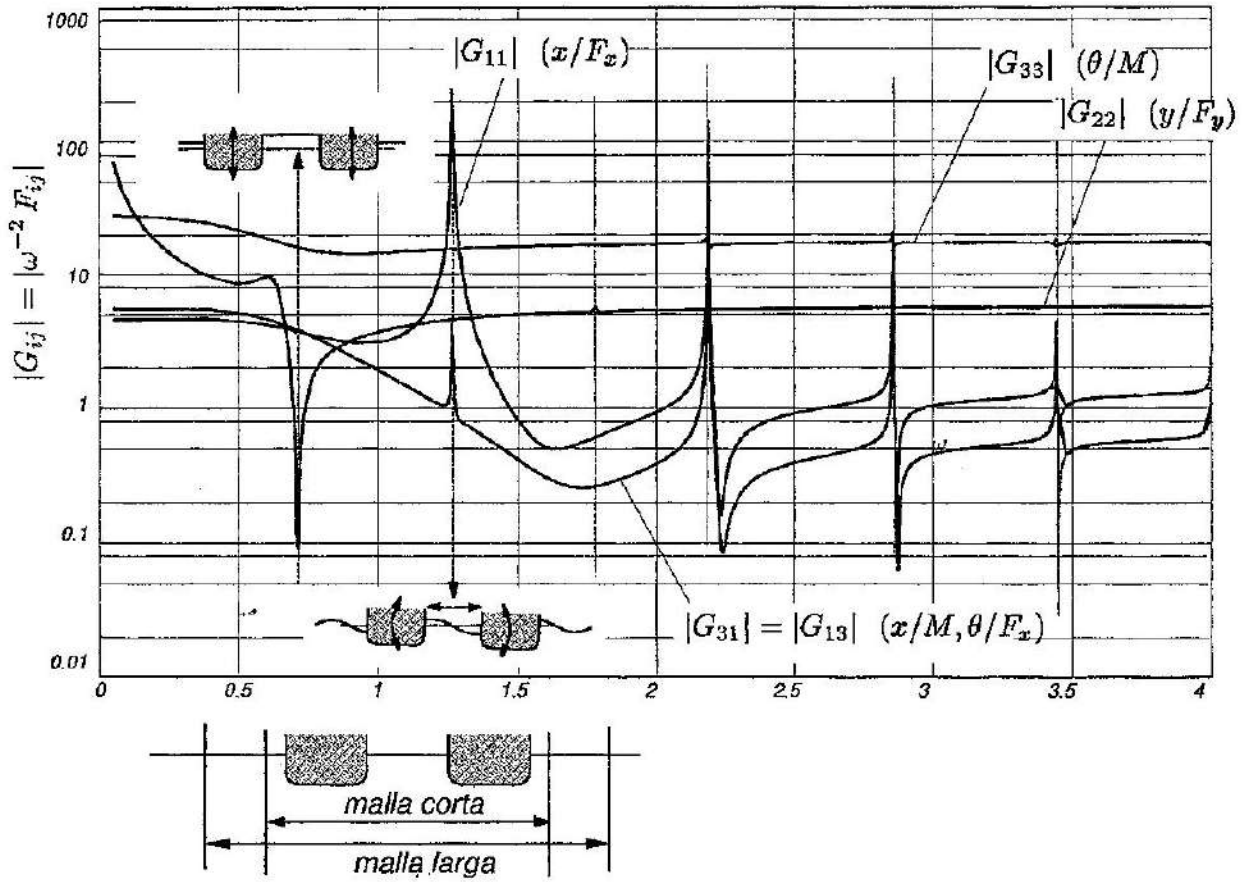

Fig. 9: Catamarán 2D. Curvas de respuesta. Se muestran superpuestos los resultados correspondientes a dos mallas diferentes de diferente ancho. Debido a la buena calidad de la condición absorbente utilizada, ambos resultados coinciden.

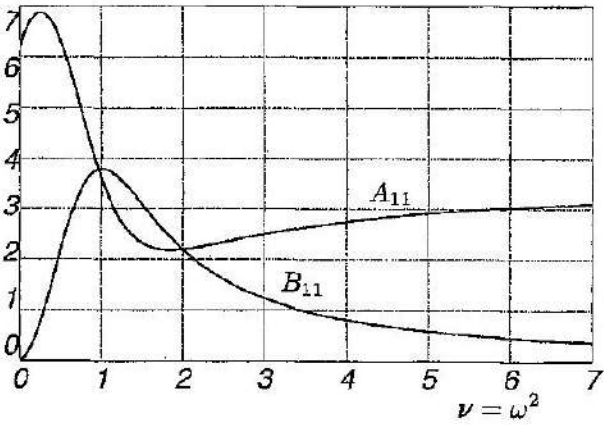

Fig. 10: Pila vertical. Masa agregada. ($L/R = 2$)

en la pileta, es decir $L = n/2(2\pi/K)$, donde L es el ancho de la pileta ($L = 2T$ para esta geometría). En la figura 9 vemos todas las funciones de transferencia en un amplio rango de frecuencias calculados con dos mallas. En una la condición de contorno absorbente está ubicada en $y = 3.5T$ es decir a 1/4 de manga de distancia del casco, mientras que en la otra la distancia al casco se ha incrementado a una manga ($y = 5T$).

6. Pila vertical. Método de elementos finitos

Ahora consideramos el caso de una pila cilíndrica de radio $R = 1$ oscilando horizontalmente en profundidad constante $H = 2$. Hemos calculado los coeficientes de masa adicional y amortiguamiento en un conjunto denso de frecuencias $0.1 < \omega < 10$. La condición absorbente fue ubicada a $r = 1.1$, es decir muy próxima a la pila (a un 10% del radio). En la figura 10 pueden verse los resultados. Obsérvese que las curvas

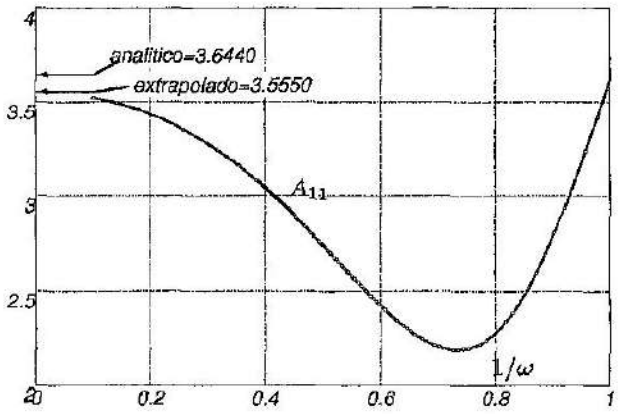

Fig. 11: Pila vertical. límite de la masa agregada para $\omega \to \infty$

no exhiben ningún tipo de oscilación, lo cual es una característica cuando la condición de contorno tiene un cierto grado de reflexión. Además los valores para $\omega \to 0, \infty$ pueden calcularse en forma cerrada o, a lo sumo, en forma de series ya que en esos límites la condición de contorno de superficie libre linealizada se comporta como Neumann y Dirichlet homogéneas respectivamente. El valor más bajo calculado fue $\omega = 0.1$ y la masa agregada correspondiente fue 6.2556, a ser comparado con el valor teórico A_{11} ($\omega \to 0$) = 2π. Por otra parte, para altas frecuencias se extrapolaron los valores obtenidos para frecuencias de hasta $\omega = 10$ en función de $1/\omega$ (ver figura 11) obteniendo un valor de $A_{11} = 3.5550$ a ser comparado con el valor obtenido por series de A_{11} ($\omega \to \infty$) = 3.6440.

7. Conclusiones

La Mecánica Computacional permite obtener resultados valiosos para la Hidrodinámica Naval. Sus aplicaciones van mucho mas allá del mero cálculo de las olas o la resistencia producida por el avance de una embarcación. En este trabajo se introduce además la posibilidad de analizar numéricamente la estabilidad de una embarcación en presencia de olas externas y la reacción o respuesta de la misma.

La utilización de técnicas computacionales adecuadas (Métodos de Paneles y Método de Elementos Finitos) permite en cada caso resolver con diferentes ventajas y precisiones diversos problemas específicos como queda evidenciado en este artículo.

El presente trabajo es sólo un comienzo de un largo camino a recorrer en donde los métodos computacionales pueden aportar soluciones o simplemente ayudas a la resolución de una amplia gama de problemas de la Hidrodinámica Naval.

8. Agradecimientos

El primer autor agradece a la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales el haberle otorgado el premio en Mecánica Computacional "Luis M. Machado" en el año 1997 y el haberlo invitado a publicar en estos Anales algunos de los trabajos en los que se encuentra abocado. Los tres autores agradecen a la Universidad Nacional del Litoral y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por haber financiado esta investigación y al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, por ser el principal impulsor y motivador de las ideas aquí presentadas.

Referencias

[A.R89] LLOYD A.R.J.M. (1989) *Seakeeping. Ship Behaviour in Rough Weather.* Ellis Horwood Limited (Chichester), 1989.

[C.98] KRING D.C. (1998) Ship seakeeping through the $\tau = 1/4$ critical frequency. *J. of Ship Research* 42(2): 113-119.

[D'E97] D'ELIA J. (1997) *Numerical Methods for the Ship Wawe-Resistance Problem.* PhD thesis, Univ. Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina), 1997.

[D'E97] NOBLESSE F. (1982) The green function in the theory of radiation and diffraction of regular water waves by a body. *J of Engineering Mathematics,* 16: 137-169.

[GK90] GIVOLI D., KELLER J.B. (1990) Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave Motion,* 12: 261-279.

[H.C96] RAVEN H.C. (1996) *A Solution Me-*

thod for the Nonlinear Ship Wave Resistance Problem. PhD thesis, Technical University Delft.

[J.88] ROMATE J.E. (1988) Local error analysis in 3-D panel methods. *J of Engineering Mathematics,* 22: 123-142.

[JJE91] NOSSEN J., GRUE J. and PALM E. (1991). Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed. *J. of Fluid Mechanics,* 227: 135-160.

[J.N78] NEWMAN J.N. (1978) The theory of ship motions. *Advances in Applied Mechanics,* 18: 221-285.

[JP85] FALNES J., McIVER P. (1985) Surface wave interactions with system of oscillating bodies and pressure distributions. *Applied Ocean Research* 7(4): 225-234.

[L.85] MORINO L., editor (1985) *Computational Methods in Potential Aerodynamics.* Springer-Verlag.

[LT88] LENOIR M., TOUNSI A. (1988) The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem. *SIAM J. Numer. Anal.,* 25: 729-752.

[MJS98] STORTI M., D'ELIA J., IDELSOHN S. (1998) Algebraic discrete non-local (dnl) absorbing boundary condition for the ship wave resistance problem. *Journal of Computational Physics,* 146 (2): 570-602.

[Ohk96] OHKUSU M. (1996) *Advances in Marine Hydrodynamics.* Computational Mechanics Publications, Wessex.

[P.D87] SCLAVOUNOS P.D. (1987) A note on a galerkin technique for integral equations in potential flows. *J. of Engineering Mathematics,* 21: 101-114.

[RW89] BECK R.F., WEBSTER W.C. (1989) Seakeeping and controllability. In Lewis E.V., editor, *Principles of Naval Architecture,* volume III. SNAME, 1989.

[SDI98] STORTI M., D'ELIA J., IDELSOHN S. (1998) Computing ship wawe resistance from wawe amplitude with the DNL absorbing boundary condition.

[SJ98] FINNE S., GRUE J. (1998) On the complete radiation-diffraction problem and wave-drift damping of marine bodies in the yaw mode of motion. *J. of Fluid Mechanics,* 357 (289-320).

[YP98] HUANG Y., SCLAVOUNOS P.D. (1998) Nonlinear ship motions. *J. of Ship Research,* 42(2): 120-130.

Manuscrito recibido en octubre de 1999.